

*Differential Equations : Studying of
Biological Models and Regeneration by iPS Cells*

例題で学ぶ 微分方程式



O'REILLY®
オライリー・ジャパン

野原 勉 著

例題で学ぶ微分方程式

野原 勉 著

O'REILLY®
オライリー・ジャパン

本書で使用するシステム名、製品名は、それぞれ各社の商標、または登録商標です。
なお、本文中ではTM、®、©マークは省略しています。

©2013 Ben T. Nohara

©2013 O'Reilly Japan, Inc.

本書の内容について、株式会社オライリー・ジャパンは最大限の努力をもって正確を期していますが、本書の内容に基づく運用結果について責任を負いかねますので、ご了承ください。

本書籍の著者への印税を「特定非営利活動法人国境なき医師団日本」へ寄付します。

まえがき

本書は近年発展が著しい生物や生態系に現れる微分方程式を題材にして、ともしれば無味乾燥した微分方程式という対象の面白さ伝えることを目的として執筆したものである。また、eBook という新しい書籍の形態をとった理由はデジタルコンテンツとしてのプログラムコードを容易に読者が試せると考えたからである。

さて、生物や生態系を数学という道具を使って対象の特性を解明しようという姿勢がこの 30 年ほどの間に顕著になり、数理生態学、数理生物学、数理人口学等々生物学と数学とを結びつけた 境界領域 とでもいうような分野が広く認識されるようになった。本書は数学を道具として使うが、その理論にはあまり立ち入らずシミュレーションを通して対象の本質を理解させようとの趣旨で執筆を進めた。たとえば、我が国は古来よりクジラを重要なタンパク源として食してきた文化があるが、捕鯨が国際社会から非難を浴びているのは周知の事実である。では、ただ捕獲しないのが種の保存にとって最も良い施策なのか。これはマグロについても言えることである。また、近年では新型のインフルエンザが不定期に大発生しているが、それはなぜ起きるのか。あるいは、昨年 (2012 年) ノーベル賞に輝いた iPS 細胞は再生医療で成功するのか。また、幹細胞から成熟細胞への分裂・分化の仕方は数理工学的にどう把握するのか。これらの疑問に答えるのが基礎学問としての数学の役割であり、本書の趣旨である。

一方、数学側から微分方程式を眺めると生物の方程式でも機械系でも電気系でも一旦方程式にしてしまえば統一的に扱えるのが数学の数学たるところであろう。大学の諸学部諸学科で学習する微分方程式は線形方程式が主体であり、その解の明示的な表し方に力点を置いているのが現状である。しかし、本書で取り上げたような現実の現象を数理モデルとして表すとほとんどの場合非線形方程式になり、その解を明示的に表現するのは困難である。このようなとき数学はどういう役割を果たすかを紹介するのが本書の趣旨であると言ってもよい。本書を通していくらかでも数理工学の醸し出す豊穡な世界を味わっていただければ著者の喜びである。

本書の構成はつぎの通りである。まず、第 1 章にて微分方程式のごく基礎的な事項

を述べ、数学としてどう取り扱うかをまとめた。この章は読み飛ばして第 2 章から読み始めても何ら困らないように配慮した。第 2 章は基礎編として、ロジスティックモデル、2 種生物の競合モデルおよび歴史的なロトカ - ボルテラモデル (Lotka-Volterra model) を取り上げた。生物や生態系に現れる微分方程式の中では個体群総数の増加を扱ったロジスティック方程式が歴史的に最も古く、したがって、この方程式を礎にその後の発展がある。ロトカ - ボルテラの捕食者 - 被捕食者モデルが圧倒的な影響力を持ち今日現在でもこの方程式を経済や貿易などに応用する試みがなされている。その後、一般化ロトカ - ボルテラ方程式としてローゼンツベイク - マッカーサモデル (Rosenzweig-MacArthur model) が登場し研究者の多くはこの方程式に興味が移行したが、この部分は本書では割愛した。続く第 3 章は第 2 章より複雑な SIR(感染症流行) モデル、興奮性細胞の活動電位を表した数理モデルであるフィッツヒュー - 南雲モデル (FitzHugh-Nagumo model)、さらに、最近のトピックスとして相応しい iPS 細胞の分裂・分化モデルを紹介し再生医療 (移植治療) の数理工学的考察を行った。フィッツヒュー - 南雲モデルは振動現象を扱う重要な方程式である 3 極真空管の van der Pol 方程式と深い関係にあり、リミットサイクルの出現が顕著な特徴になる。iPS 細胞による再生治療は何としても成功して欲しいオールジャパンの技術である。基礎科学の数学に携わる者としてもこれを成功させるため後方支援を惜しまない所存である。第 4 章は補遺として各章の付随的な箇所を補った。

本書では数学的な解説だけではなくシミュレーションを通してより理解を深める工夫を施した。シミュレーションには Mathematica(ver.8) を主に使用しそのコードを随所に示した。読者は自らそのコードを実行することにより対象としている現象が手に取るように分かるであろう。本文中において数学的に強調したいところは太文字で、生物学や生態学などの数学以外の分野で重要な語句は「」で、また、一般的な意味での強調は傍点 (˙) で示した。さらに、プログラムコードおよびこれに関する語句はタイプライタ文字を使用し一見して分かるようにした。

本書の使い方

本書で紹介したサンプルシミュレーションはすべて Mathematica を使って作成したものである。ソースコードは実装例として掲載しているので、読者がコードを改変して独自のサンプルを作ることもできる。またサンプルは Mathematica がなくても無料で配布されている CDF Player があれば、すべて動かすことができる。CDF Player は以下のウルフラムのサイトからダウンロードできる。

<http://www.wolfram.com/index.ja.html>

オライリー・ジャパンでは、本書のサイトを用意している。ここからは、本書で使った Mathematica のコードと出力結果を含む CDF のデモファイルも入手できるようになっている。

<http://www.oreilly.co.jp/books/9784873116020/>

コード例の使用

一般に本書のコードを読者のプログラムやドキュメントで使用できる。コードの大部分を複製しない限り、オライリー・ジャパンの許可を得る必要はない。例えば本書のコードの一部をいくつか使用するプログラムを書くのに許可は必要ない。

出典を明らかにしていただくのはありがたいことだが、必ずしも必要ない。出典を示す際は通常、題名、著者、出版社、ISBN を含めてほしい。例えば、『例題で学ぶ微分方程式』（野原勉著、オライリー・ジャパン、ISBN 978-4-87311-602-0）のようになる。

連絡先

本書に記載した情報は、できる限り検証しているが、変更点や誤りがあるかもしれない。そのような箇所を見つけた場合には、下記まで知らせてほしい。

株式会社オライリー・ジャパン

〒160-0002 東京都新宿区坂町 26 番地 27 インテリジェントプラザビル 1F

電話 03-3356-5227

FAX 03-3356-5261

電子メール japan@oreilly.co.jp

『例題で学ぶ微分方程式』の目次、正誤表、サンプル等については、以下のサイトを参照してほしい。

<http://www.oreilly.co.jp/books/9784873116020/>

また、著者のホームページ

<http://www.drben.jp/>

では、執筆後のトピックスの紹介や読者の皆さんの質問を受け付けるようにしている。

謝辞

本書の査読を快く引き受けていただいた東京大学数理科学研究科の織田孝幸氏には心から感謝いたします。氏は代数学がご専門ですが解析学特に特殊関数にも造詣が深く随所で貴重なご意見を賜りました。また、ウルフラムリサーチアジアリミテッドの中村英史氏、Mathematica 認定インストラクター（日本で 4 名）のライセンスを所持される大橋真也氏には Mathematica のコードをチェックしていただきましたことをお礼申し上げます。最後に本書を執筆する機会を与えていただき、また、著者の悪文の修正と図表などの編集作業に労を厭わず携わっていただいたオライリー・ジャパン編集部の赤池涼子氏に感謝いたします。氏の援助なくして本書は世に出ることはなかったでしょう。いうまでもないことですが、内容の誤りの責任はすべて著者にあります。読者の叱責を乞う次第です。

平成 25 年立春 東京九段にて 著者

目次

まえがき	vii
第 1 章 はじめに：微分方程式とは	1
1.1 常微分方程式と相図	1
1.2 微分方程式の数値解法	6
第 2 章 基礎編：生物モデルで理解する微分方程式	9
2.1 ロジスティックモデル	9
2.1.1 ロジスティックモデルが形成する美しい曲線	9
2.1.2 定性的な解の捉え方	15
2.2 2 種生物の競合モデル	18
2.2.1 平衡点の解析	18
2.2.2 解軌跡	20
2.2.3 ヌルクラインによる解析	24
2.3 マグロは絶滅するか：ロトカ - ボルテラの捕食者 - 被捕食者モデル	33
2.3.1 標準モデル	33
2.3.2 周期解であることの証明	38
2.3.3 $a = b = c = d$ の場合	40
2.3.4 操業度の付加	41
第 3 章 応用編：さらに複雑な例で理解する—感染症流行から iPS 細胞まで	47

3.1	感染症流行モデル	47
3.1.1	SIR モデル	47
3.1.2	問題の定式化	48
3.1.3	ヌルクラインによる解析	49
3.1.4	感染・回復相対比数と最終状態	53
3.2	クジラの回遊モデル	56
3.2.1	ロジスティック方程式からの発展	56
3.2.2	クジラの季節回遊モデル	58
3.3	フィッツヒュー - 南雲モデル	61
3.3.1	フィッツヒュー - 南雲モデル方程式	61
3.3.2	外部刺激電流 $I = 0$ のとき：興奮性軌道	62
3.3.3	フィッツヒュー - 南雲方程式のリミットサイクル	67
3.4	iPS 細胞による再生医療 (移植治療)	72
3.4.1	幹細胞の増殖モデル：2 分画モデル	73
3.4.2	再生医療の数理解析	82
3.4.3	多分画モデル	92
第 4 章	補遺：本書を読むにあたっての注意点	93
4.1	解の存在性と一意性	93
4.2	注意を要する微分方程式	97
4.3	ファンデルポール方程式	102
4.3.1	ホップ分岐	105
4.4	ポアンカレ - ベンディクソンの定理	107
4.5	Mathematica のプログラミング	109
索引		111

第2章

基礎編：生物モデルで理解する 微分方程式

2.1 ロジスティックモデル

2.1.1 ロジスティックモデルが形成する美しい曲線

マルサス*¹ は人口論において、資源制約がなければ生物個体群が指数関数的に、あるいは、幾何級数的に増殖する、という集団生物学の基本原則を説いた。一方でフェアフルスト*² は、人口の無制限な成長は不可能であり人口密度の上昇は人口成長に負の効果を与えるであろう、という考え方に基づいたロジスティックモデルと呼ばれる個体群成長モデルを提案した。本書の最初にこのロジスティックモデルを解析しよう。

さて、生物個体群の総数を x で表す。 x は時間 t とともに変化するので $x(t)$ と書く。このときつぎの方程式をロジスティック方程式 (logistic equation) またはロジスティックモデルと呼ぶ。

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right). \quad (2.1.1)$$

ここで、 $\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}$ である。すなわち、 x は t の関数であるので (2.1.1) 左辺は $\frac{dx}{dt}$ を表す。ここで r は個体群総数の増加度合いを示すものであり「マルサス係数」*³ または「成

*¹ 英国の経済学者トマス・マルサス (Thomas R. Malthus, 1766-1834).

*² ベルギーの数学者ピエール・フェアフルスト (Pierre F. Verhulst, 1804-1849).

*³ Malthus, T. R., 'An Essay on the Principle of Population', London: J. Johnson, 1798.(初版)

長率」と言われているものであり、正の定数とする。また、 k は「環境収容力 (carrying capacity)」*4 と言われるものであり、これも正の定数とする。左辺は生物個体群総数 x を時間で微分したものである。したがって、生物個体群総数の時間変化割合が左辺だと思えばよい。この時間変化割合を規定したものが右辺であると (2.1.1) を理解するのである。もう少し詳しく書くと (2.1.1) は

$$\left(\begin{array}{l} \text{個体群総数の} \\ \text{単位時間当りの} \\ \text{増加レート} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{単位個体当りの} \\ \text{人口増加能力比} \end{array} \right) \times (\text{個体群総数}) \times \left(\begin{array}{l} \text{個体群総数の増加} \\ \text{に寄与しない割合} \end{array} \right)$$

ということになる。 x は個体群総数を表すので (2.1.1) を解いても x が0になればこれは x という個体群の絶滅を意味する。したがって数学的には x が負ということもあるがこれは考えない。すなわち $x < 0$ は解とはしない。 x は種の個体群の総数であるから整数であり整数の変化に微分を取り入れるのはおかしいと思われるかもしれないが、個体群の数の値も膨大になれば連続量として扱うことが許される。実際我々の身近に存在するコップ一杯の水もミクロ的には分子の個数を数えれば整数であるが、通常は連続量として扱っても問題ない。

フェアフルストはベルギーの人口の最大許容値をこのモデルを使って計算した。なお、ロジスティックとはギリシア語が語源 (logistikē) であり、原義は「計算の美」である。いわゆるロジスティック曲線の美しさを言い表しており、フェアフルスト自身が (2.1.1) をロジスティック方程式と呼んだ。文献では、フェアフルスト方程式と呼んでいるものもある。また、A. Pearl もアメリカ合衆国の人口増加の記述として同じ方程式を導出している。

さて早速 (2.1.1) を解いてみよう。まず環境収容力を無限大とすると (2.1.1) は

$$\dot{x} = rx \tag{2.1.2}$$

となる。初期値を $x(0) = 1$ として、すなわち時刻 $t = 0$ での種 x の個体群総数が 1 (1 という単位であって 1 匹とか 1 羽という意味ではなく、100 万匹であっても一億羽であっても構わない) であるときのシミュレーションをしよう。成長率 r を 0.5 としたときのコードを **実装例 2.1.1** に示す。

*4 ある環境下で利用できる食物や水など必要なものが制限されている中で、維持できる特定の生物個体群の大きさ (数) を、その生物にとっての環境収容力と言う。たとえば、人類全体の人口を考えれば地球の持つ資源は自ずと限りがあり、地球の人類という個体群に対する環境収容力が決まる。

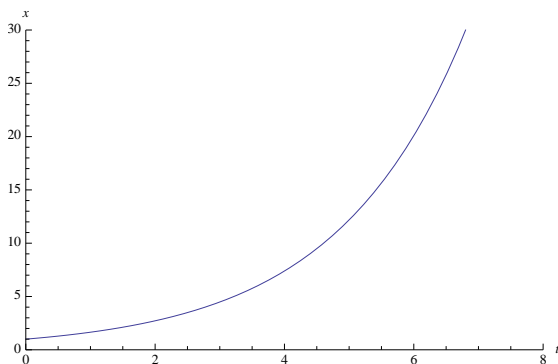


図 2.1.1 (2.1.2) の解 : $r = 0.5$, 初期値 $x(0) = 1$.

実装例 2.1.1 (2.1.2) の数値計算 (時系列)

```
Clear[x,sol];(*変数の初期化*)
r = 0.5;(*成長率の設定*)
sol = NDSolve[{x'[t] == r x[t], x[0] == 1}, x, {t, 0, 8}]
(*方程式 (2.1.2) の数値解法*)
Plot[ x[t] /. sol, {t, 0, 8}, PlotRange -> {{0, 8}, {0, 30}},
  AxesLabel -> {t, x}(*数値解法結果のグラフ化*)
```

出力結果のグラフを図 2.1.1 に示す. 横軸は時間 t であり縦軸は個体群の総数 x である. このように時間の経過とともに個体数は指数関数的に増大することが分かる. では初期値を $x(0) = 1, 2, 3$ と変えて同じようにシミュレーションしてみよう. コードを **実装例 2.1.2** に示す.

実装例 2.1.2 (2.1.2) の 3 種類の初期値に対する数値計算 (時系列)

```
Clear[x,sol];(*変数の初期化*)
r = 0.5;(*成長率の設定*)
sol = NDSolve[{x'[t] == r x[t], x[0] == {1, 2, 3}}, x, {t, 0, 8}]
```

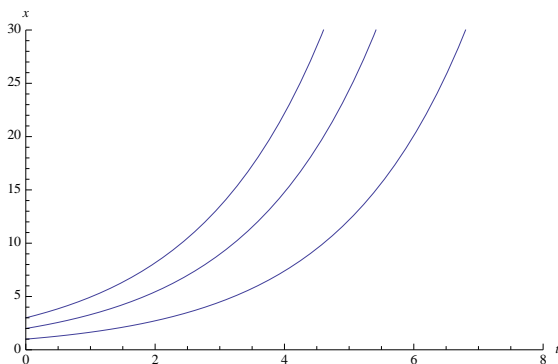


図 2.1.2 (2.1.2) の解： $r = 0.5$, 初期値 $x(0) = 1, 2, 3$.

(*方程式 (2.1.2) の 3 種類の初期値に対する数値解法*)

```
Plot[x[t] /. sol, {t, 0, 8}, PlotRange -> {{0, 8}, {0, 30}},
  AxesLabel -> {t, x}](*数値解法結果のグラフ化*)
```

図 2.1.2 に出力結果を示す。一番下の曲線から初期値を $x(0) = 1, 2, 3$ とした時の時間経過を表している。容易に想像つくようにどの初期値に対しても時間が十分経過すると個体数は無限大まで増加する。しかし、自然界を考えたとき生物種が無限大になることはないのでこのようなモデルは現実とはかけ離れていると言えるだろう。そこでフェアフルストは (2.1.1) のようなモデルを考案したのである。ではつぎに (2.1.1) をシミュレーションしてみよう。成長率 r は同じく 0.5 とし、環境収容力 k を 10 としよう。初期値は $x(0) = 1$ とする。コードを **実装例 2.1.3** に示す。

実装例 2.1.3 ロジスティック方程式 (2.1.1) の数値計算 (時系列)

```
Clear[x, sol]; (*変数の初期化*)
r = 0.5; k = 10; (*成長率と環境収容力の設定*)
sol = NDSolve[{x'[t] == r x[t] (1 - x[t]/k), x[0] == 1}, x,
  {t, 0, 10}]
(*ロジスティック方程式 (2.1.1) の数値解法*)
```

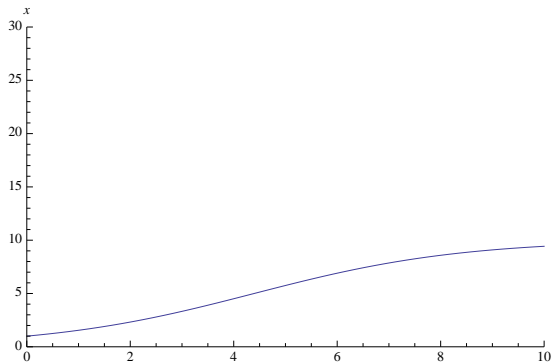



図 2.1.3 ロジスティック方程式 (2.1.1) の解 : $r = 0.5, k = 10$, 初期値 $x(0) = 1$.

```
Plot[x[t] /. sol, {t, 0, 10}, PlotRange -> {{0, 10}, {0, 30}},
  AxesLabel -> {t, x}>(*数値解法結果のグラフ化*)
```

図 2.1.3 がその結果である。個体数は $x = 10$ で飽和しているように見える。実際に環境収容力の値で個体数は飽和する。この事実をこの章の最後に数式で表す。

では初期値が 1 以外ではどうなるのか試してみよう。初期値を $x(0) = 1, 5, 15, 25$ としたときのコードを**実装例 2.1.4**、その出力結果となるグラフを図 2.1.4 に示す。

実装例 2.1.4 ロジスティック方程式 (2.1.1) の 4 種類の初期値に対する数値計算 (時系列)

```
(* ロジスティック方程式 (2.1.1) *)
Clear[x, sol]; (*変数の初期化*)
r = 0.5; k = 10; (*成長率と環境収容力の設定*)
sol = NDSolve[{x'[t] == r x[t] (1 - x[t]/k), x[0] == {1, 5, 15, 25}},
  x, {t, 0, 10}>(*ロジスティック方程式の数値解法*)
p1 = Plot[x[t] /. sol, {t, 0, 10}, PlotRange -> {{0, 10}, {0, 30}},
  AxesLabel -> {t, x}]; (*数値解法結果のグラフ化*)
p2 = Plot[{k, k/2}, {t, 0, 10}, PlotRange -> {{0, 10}, {0, 30}},
```

```
PlotStyle -> {Dotted, Dashed}};(*x=k と x=k/2 のグラフ化*)
Show[p1, p2](*p1 と p2 の描画*)
```

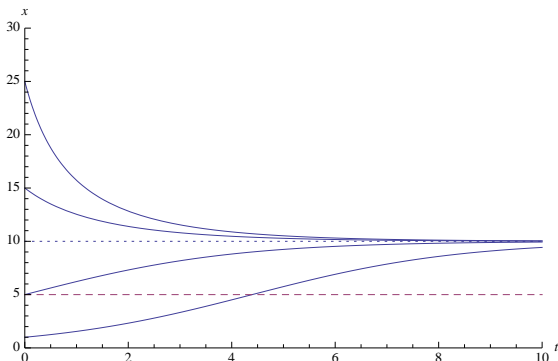


図 2.1.4 ロジスティック方程式 (2.1.1) の解 : $r = 0.5, k = 10$, 初期値 $x(0) = 1, 5, 15, 25$.

一番下の曲線から初期値を $x(0) = 1, 5, 15, 25$ とした時の時間経過を表している。いずれの曲線も $x = 10$ で飽和しているのが分かる。この値は環境収容力 $k = 10$ と一致している。一番下の曲線は S 字型のカーブを描いている。すなわち、 $x = 5 (k/2)$ のところが変曲点となり、凹凸がここで変わっている。この S 字型のカーブの持つ美しさが「ロジスティック」の名前の由来である。初期値が $x \geq 5 (k/2)$ の値) では S 字型カーブは形成されず指数関数的に $x = 10 (k)$ の値) に収束する。

インタラクティブに初期値の値を変化させて解の様子を見るにはつぎのような**実装例 2.1.5**を使う。初期値 $x(0)$ を 0 から 30 までの範囲で変化させている。その結果は図 2.1.5 となる。

実装例 2.1.5 (2.1.1) のインタラクティブな初期値変化の数値計算 (時系列)

```
Clear[x, sol];(*変数の初期化*)
r = 0.5; k = 10;(*成長率と環境収容力の設定*)
sol[p_] :=
  NDSolve[{x'[t] == r x[t] (1 - x[t]/k), x[0] == p}, x, {t, 0, 10}];
```

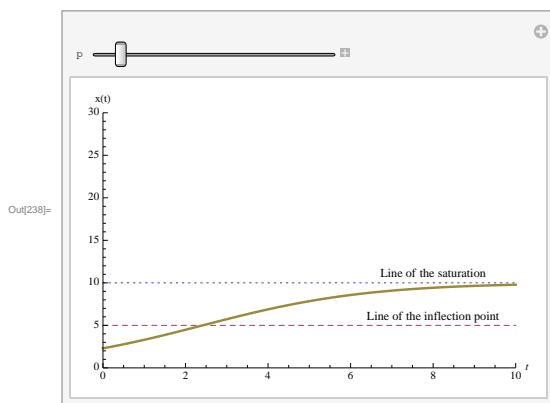


図 2.1.5 ロジスティック方程式 (2.1.1) の解： $r = 0.5, k = 10$, 初期値 $x(0)$ を 0 から 30 まで変化させて (図上のスライダーの位置が初期値に対応する) その解の様子を見ることができる。

(*ロジスティック方程式の初期値を p とした数値解法*)

```
Manipulate[Plot[
  Evaluate[{k, k/2, x[t] /. sol[p]}, {t, 0, 10}],
  PlotStyle -> {Dotted, Dashed, Thick},
  PlotRange -> {{0, 10}, {0, 30}}, AxesLabel -> {t, "x(t)"},
  Epilog -> {Style[Text["Line of the saturation", {8, 11}], 10],
    Style[Text["Line of the inflection point", {8, 6}], 10]},
  {p, 5}, 0, 30, SaveDefinitions -> True]
```

(*Manipulate 関数によるインタラクティブな初期値変化に対する解の表示*)

2.1.2 定性的な解の捉え方

前節では方程式を数値計算してその解の挙動を調べた。言い換えると与えられた方程式の挙動を定量的に把握したのである。現実の問題もこのようにして解析し、その

変数の持つ特性を把握することは多々ある. このように数値的に方程式を解くのは重要な一つの手法であることに間違いはない. しかし解の特性を大局的にあるいは定性的に捉えたいという場合もしばしばある. たとえば個体群が現在より増加するのがあるいは減少するのを知りたいということもある. 絶滅危惧種に認定するかどうかという問題では個体群の絶対数そのものよりむしろその増加減の割合が重要である.

(2.1.1) を数値的に解くのではなくその解の特性を見てみよう. x を横軸に取りその微分を縦軸に取るグラフを**実装例 2.1.6** により出力させる. 前節と同様に $r = 0.5, k = 10$ とする.

実装例 2.1.6 ロジスティック方程式 (2.1.1) のベクトル場^{*5} 計算

```
r = 0.5; k = 10; (*成長率と環境収容力の設定*)
Plot[r x (1 - x/k), {x, 0, k + 1},
  PlotRange -> {{-0.10, k + 2}, {-0.5, 2}},
  AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {x, dx/dt},
  Epilog -> {Style[Text["0", {0.05, -0.05}], 10],
             Style[Text["0", {-0.05, 0.05}], 10]}]
(*dx/dt の描画*)
```

図 2.1.6 はロジスティック方程式 (2.1.1) のベクトル場を表したものである. このグラフはコンピュータを使うまでもなく容易に描くことができる. (2.1.1) の右辺は x に関する 2 次式であるので上に凸のグラフが描ける. このグラフは x の増加減の様子を示す. 縦軸が正の部分は微分が正であるから x そのものは増加することになり, 縦軸が負の部分はその逆である. したがって図中に示したように縦軸が正の部分に相当する x のところでは右の方向へ変化することになり, 縦軸が負の部分に相当する x のところでは左の方向へ変化する. したがって初期値が x 軸 (横軸) のどこであっても $x = 10$ に収束することが分かる. ただし初期値が $x(0) = 0$ と 10 のときにはその位置にとどまる. この点では微分が 0 であるので動かない. このような点を**平衡点**と言う. 初期値が $x(0) = 0$ から少しでも離れば微分は正になるので x は右方向へ移動し $x = 10$ に到達する. また初期値が 10 より大ききところでは微分が負であるから左方向へ移動し, やはり $x = 10$ に到達する. このことから $x = 10$ は**安定**であるといい, $x = 0$ は不

^{*5} 2 次元の微分方程式を $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$, ただし, $\mathbf{v} = \text{col}(x(t), y(t))$, $\mathbf{f} = \text{col}(f_1(x, y), f_2(x, y))$ とすると, ベクトル場とは方程式の \mathbf{f} を (x, y) で評価したものである. したがって, ロジスティック方程式の場合は 1 次元であるから $r x(1 - \frac{x}{k})$ を x で評価したものとなる.

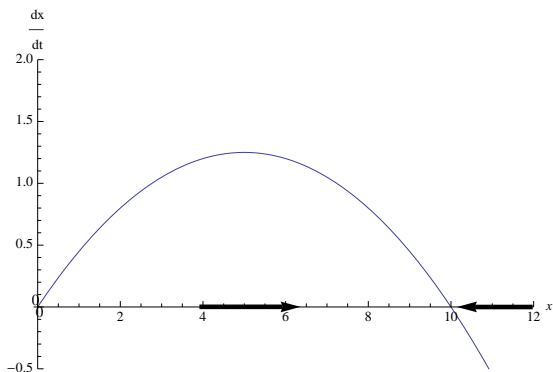


図 2.1.6 ロジスティック方程式 (2.1.1) のベクトル場： $r = 0.5, k = 10$.

安定であるという (安定, 不安定の正確な定義は 1.1 節, 4 頁脚注 6 参照). なおかつ平衡点以外の任意の初期値から $x = 10$ にたどり着くのでこのような点を**大域的安定**と言う.

●著者紹介

野原 勉 (のほら べん)

現在, 東京都市大学教授, 東京大学数理科学研究科連携併任講座客員教授.
工学博士. 専門は微分方程式.

写真は著者が三菱重工業 (株) 技術本部勤務時代に従事した開発中の HIIA ロケット.
1999 年 10 月鹿児島県種子島吉信射点にて撮影.



例題で学ぶ微分方程式

2013年4月4日 初版第1刷発行

著 者 野原 勉(のはら べん)

発 行 人 ティム・オライリー

発 行 所 株式会社オライリー・ジャパン

〒160-0002 東京都新宿区坂町26番地27 インテリジェントプラザビル1F

Tel (03) 3356-5227

Fax (03) 3356-5263

電子メール japan@oreilly.co.jp

ISBN978-4-87311-602-0

本書は著作権上の保護を受けています。本書の一部あるいは全部について、株式会社オライリー・ジャパンから文書による許諾を得ずに、いかなる方法においても無断で複写、複製することは禁じられています。